
NIPS2007読み会 18th Jan. 2008
Markov Chain Monte Carlo with People

Rikiya Takahashi

アジェンダ

- **Motivation (論文とは関係ありません)**
 - **MCMC法の復習 – Metropolis 法と Barker acceptance function**
 - **実験の大枠**
 - ▶ 人の心の中の、オブジェクトに関する内部表現としての生成モデルを知りたい
 - ▶ 人間によるacceptance function model を導入してMCMCでその生成モデルを推定
 - **実験結果**
 - ▶ 1次元データ
 - ▶ 9次元データ
-

Motivation

【研究というよりは半分遊び感覚で】前から思っていたこと

- <論文の中身ではありませんので軽く聞き流してください>
 - ある種の質問に対する人間の反応を、マルコフ連鎖モンテカルロ法の要素として利用することで何か面白いことができるか？
 - ▶ 最近はやりの集合知の利用形態
 - 利用例: **importance サンプリング**を利用した手動積分
 - ▶ たくさんの人にアンケートをとり、それぞれの人に (x, y) 二種類の値を回答してもらいたいとす
 - ▶ 人を呼ぶのはコストがかかる。
 - ▶ 調査側が、 $P(x)$ で重み付けされた y の期待値を取りたいとする。
 - ランダムに人をかき集めてくるのは、効率が悪い。人を一人呼んできたら、「あなたより x が高そうな人を紹介してください」といって次の被験者を紹介してもらおうほうが、
効率的に積分できる。
 - **Cognitive science** の世界では、人間をMCMCの要素として利用することで、人間が判断に使っていると想定される確率モデルを学習する、といったことがされているらしい
-

目的: Subjective probability distribution を外部から推定する

- **Subjective probability: 人が何かに対して「こうである」と思い込む信念の度合い**
 - ▶ In cognitive science applications, probabilities refer to ‘degrees of belief’. Thus, a person’s degree of belief that a coin that has rolled under the table has come up heads might be around 1/2; this degree of belief might well increase rapidly to 1 as she moves her head, bringing the coin into view. Her friend, observing the same event, might have different prior assumptions and obtain a different stream of sensory evidence. Thus the two people are viewing the same event, but their belief states and hence their subjective probabilities might differ.
 - **競馬を例にして**
 - ▶ 統計的確率としての勝率
 - 状態変数が変化しない状況で独立施行を繰り返して各競走馬が勝つ割合
 - ▶ 主観確率としての勝率
 - 予想する人間が、各競走馬がそれぞれどれくらいの割合で勝つと思っているか。その予想結果の平均は、オッズに反映される。
 - **今回は、あるサンプルがカテゴリcに所属するか否かを判定するのに必要な人の心の中の生成モデル $p(x|c)$ を アンケート+MCMCを使って推定する**
 - **後で知ったのですが、Best Student Paper だったらしいですね**
-

Metropolis法 の 復習

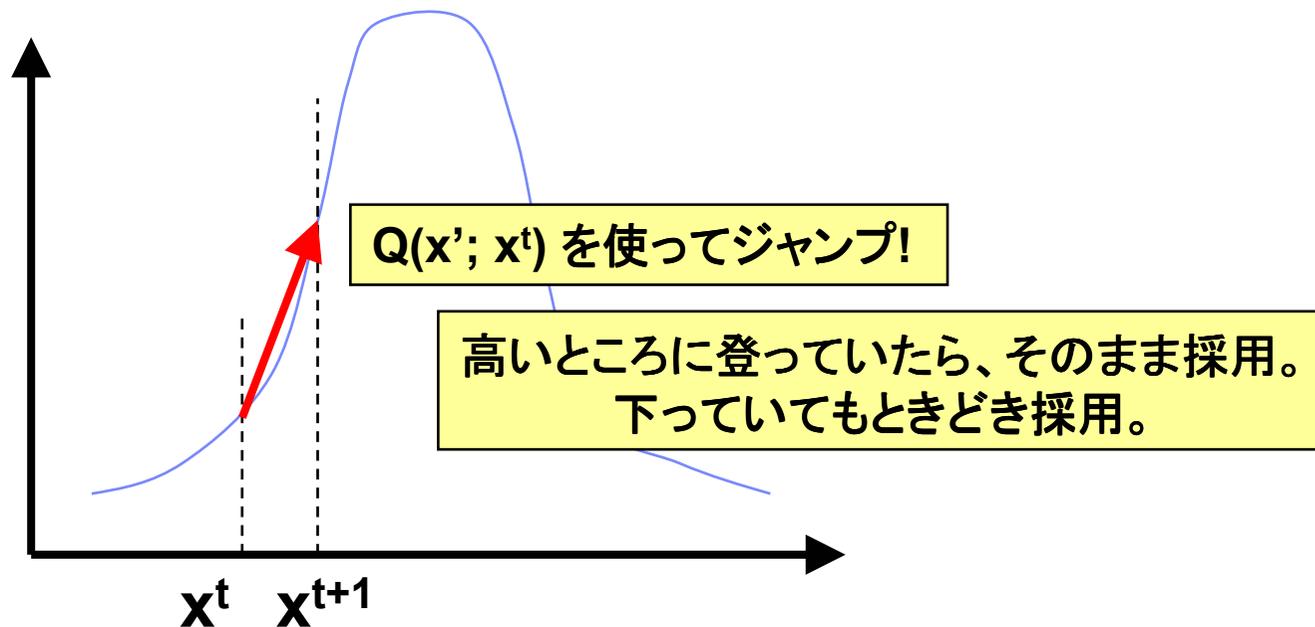
- サンプルングが難しい分布からサンプルングするときのスタンダード
- X の確率分布 $\pi(x)$ からサンプルングしたsequence $\{x^1, x^2, \dots\}$ を得るときに、 t 番目のサンプル x^t まで生成しおわっている状況下で、以下の関数 : acceptane function の値を計算する。

$$A(x'; x^t) = \frac{\pi(x')}{\pi(x^t)} \cdot \frac{Q(x^t; x')}{Q(x'; x^t)}$$

- ▶ $Q(\cdot; \cdot)$ は proposal density と呼ばれ、 x^{t+1} の候補 (まだ x^{t+1} とは決定していない) である、 x' を発生させるための分布である。このproposal density は gaussian のように、乱数の発生方法がわかっている分布を用いる。
 - x^{t+1} は以下の条件で x' または x^t のどちらかになる。
 - ▶ $A \geq 1$ のときは問答無用で $x^{t+1} = x'$
 - ▶ $A < 1$ のときは、確率 A で $x^{t+1} = x'$, 確率 $(1-A)$ で $x^{t+1} = x^t$
 - もし、 x^N 以降にマルコフ連鎖の定常状態に達していれば、 $\{x^N, x^{N+1}, \dots\}$ は結果的に確率分布 $\pi(x)$ にしがっている
-

Metropolis法 の 復習

- 要は、山の中で急峻なところは極力登れるだけ登っておき、たまには下る、というのをバランスよく繰り返し替えることで結果的に分布全体をうまくなめているような感じ
 - ▶ なので、モードが複数あるような分布を相手にする場合はアニーリングっぽい方法 (パラレル・テンパリング法とか) をやらないとうまく行かない



Barker acceptance function

Proposal density が対称な場合の、metropolis法とは別のacceptance function

- Metropolis法の場合、proposal distribution が対称 : $Q(x_1; x_2) = Q(x_2; x_1)$ の場合には、

$$A(x'; x^t) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(x')}{\pi(x^t)} \right\}$$

- となるが、期待値をとって min を外せば (注: 本当の導出はこんなにいい加減ではない)

$$A(x'; x^t) = \frac{\pi(x')}{\pi(x') + \pi(x^t)}$$

Barker acceptance function

実験の流れ

- **被験者にカテゴリごとの画像データの特性を学習させ、次にその心理的表現をMCMCを使って取り出す**
 - ▶ 学習時: 1つの学習データを見せて、予測をさせ正解を教えてあげる
 - ▶ MCMC時: 2つの画像データ: 片方はカテゴリ c , もう片方は違うカテゴリを同時に見せて、どちらの画像がカテゴリ c に該当するか否かをyes / no で答えさせる、というのを繰り返す
 - 表示する画像は人間のacceptance functionを利用したマルコフ連鎖から生成する
 - **実験共通の仮定**
 - ▶ 人間はあるカテゴリ c からデータ x が発生する分布 $p(x|c)$ と c 以外のカテゴリから発生する分布 $g(x)$ とを心の中にもっている
 - ▶ 人間は分布 $p(x|c)$ と分布 $g(x)$ の関数として、 x がカテゴリ c に属するか属さないかを判別する関数をもっている
 - ただし、この関数がBayes ruleとは限らない
 - **被験者の回答を集めて、 $p(x|c)$ を推定するのが目的である**
-

推論の大枠

- 1. 人間の acceptance function についていくつかのモデルを仮定する。
このとき、 x の定常状態 $\pi(x)$ が、acceptance function のパラメータを利用した関数として定義される。
 - 2. 質問を十分沢山繰り返せば、表示される画像は定常状態 $\pi(x)$ に従う分布から生成されていることになるので、 $\pi(x)$ のパラメータが測定されると言ってもよい
 - 3. $\pi(x)$ と、先に設定した acceptance function の仮定から、人の心の中の $p(x|c)$ が判明する。
 - ▶ Acceptance function の仮定が間違っていれば、当然結果も間違っているわけですが、training distribution と MCMC の結果を比較することで、acceptance function の形態を推測することができます
-

Human's acceptance function の仮定

1. rational Bayesian learner model

- 人間は、主観確率をベイズの定理に適用して予想をたてる Bayesian learner であると仮定する。
 - ▶ なお、動学的に判断が整合な合理的学習者は結果的に Bayesian になるそうで、経済学ではスタンダードな人間モデルは Bayesian だそうです。Frequentist として最尤推定的に戦略をたてていく存在は、時間的な不整合が生じて(将来選択が反転することを考慮したうえでそれと逆の選択を今する、みたいな結果がでてしまう)、未来の自分自身と(ゲーム理論的な意味での)ゲームをする必要が生じ、いろいろ面倒くさいらしい。
 - ▶ 仮説h1: サンプルx1 は カテゴリc の生成モデル $p(x|c)$ から出てきて、サンプルx2 は カテゴリc 以外の生成モデル $g(x)$ から出てきた
 - ▶ 仮説h2: 仮説1と生成元が逆の仮説
 - ▶ 人間は、事後確率 $P(h_1|x_1, x_2)$ を用いて、どちらがカテゴリc であるかを randomized policy にしたがって決定する存在である、とする

$$\begin{aligned} p(h_1 | x_1, x_2) &= \frac{p(x_1, x_2 | h_1)p(h_1)}{p(x_1, x_2 | h_1)p(h_1) + p(x_1, x_2 | h_2)p(h_2)} \\ &= \frac{p(x_1 | c)g(x_2)p(h_1)}{p(x_1 | c)g(x_2)p(h_1) + p(x_2 | c)g(x_1)p(h_2)} \end{aligned}$$

Human's acceptance function の仮定

1. rational Bayesian learner model

- **Weak assumption**

- ▶ A) 各仮説の prior は 同じ分布 - $p(h_1) = p(h_2)$
- ▶ B) カテゴリc以外の分布はサンプル x_1 と サンプル x_2 とで同じ : $g(x_1) = g(x_2)$
- ▶ A) はまあいいとして、B)の心がよくわからないのですが……

$$p(h_1 | x_1, x_2) \approx \frac{p(x_1 | c)}{p(x_1 | c) + p(x_2 | c)}$$

これが **Barker acceptance function** と同じ形をしている、というのがミソ

- ▶ こうして出てきたacceptance function を Luce choice rule といい、cognitive science の分野で結構よく使われるモデルらしい

- **Rational Bayesian Learner Model + Weak assumption** が成立する場合、生成される画像の定常分布は、結果的に人の心の中のカテゴリ分布 $p(x|c)$ と一致する
 - ▶ つまり結果から $p(x|c)$ の推定がしやすい
-

Human's acceptance function の仮定

2. more deterministic model

- **Rational Bayesian Learner は人間の実際の判断の仕方と一致しないことが多い。**
 - ▶ 具体的には、posterior $p(h_1|x_1, x_2)$ の確率にしたがって randomized policy で選ぶというより、よくわからない境界があるが、それを境にしてもっと deterministic に決め付けているように見える
 - Rational なモデルは Bayesian だけど、現実には Frequentist に近いみたいです
 - なのでこの問題をどうするかはゲーム理論家の間ではホットな話題だとか
- **確率をべき乗にして more deterministic な acceptance function を定義する**

$$A(x^*; x) = \frac{p(x^* | c)^\gamma}{p(x^* | c)^\gamma + p(x | c)^\gamma}$$

$$\pi(x) \propto p(x | c)^\gamma$$

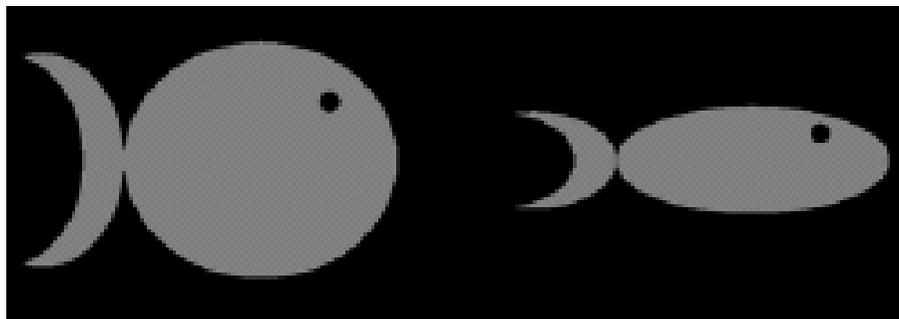
- ▶ このモデルは rational Bayesian learner とモードだけは一致している
-

Experimental Results

カテゴリが既知の場合の実験

養殖の魚と天然の魚の区別を人間に学習させるタスク

- 被験者 50人を大学新聞でリクルートし、マルコフ連鎖が収束したとみなせる40人のデータを使用
 - 35分間の試験で\$4 もらったそう
- 「養殖の魚は、餌の量をコントロールされて画一的に育てられるので、みんな大きさが似ており、おもに遺伝によってのみ大きさが決まるが、天然の魚は育った環境によって大きさが変わるので、どんな大きさにもなりうる」という事前知識を被験者に与える
 - これは人間の頭の中に、養殖の魚は縦幅が正規分布によって発生し、天然の魚は縦幅が一様分布によって発生するものだというpriorを持たせることになっている
- 実際には魚の写真ではなくて、横幅が同じで縦幅がシミュレーションによって発生した魚のイラストを見せる。



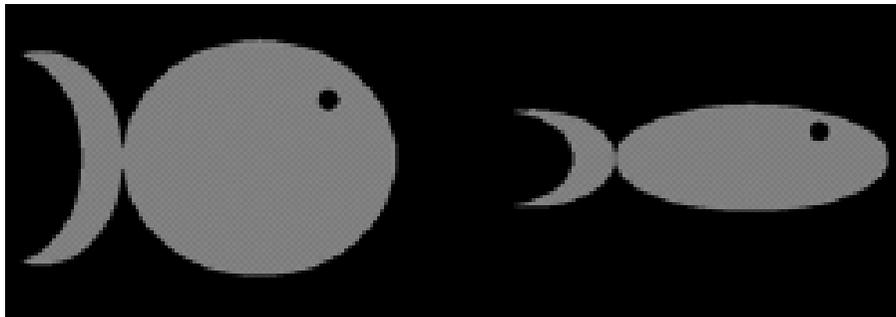
こんなショボいイラストですが、
この魚区別実験は業界で
結構スタンダードらしい

(僕らもこんな変なネーミングの
データセットを定義しよう)

カテゴリが既知の場合の実験

養殖の魚と天然の魚の区別を人間に学習させるタスク

- **Training trial と MCMC trial がある**
- **Training trial**
 - 天然魚と養殖魚を 1:1 の割合でランダムに選び、それぞれの分布パラメータに従って魚のイラストを一つだけ生成
 - 被験者に見せて、天然か養殖か予想させた後に、それが正解か否か教える
 - これによって人は心の中に $p(x|c)$ と $g(x)$ をもつ
- 使うパラメータ
 - 天然魚の一様分布 : $U(2.63\text{cm}, 5.76\text{cm})$
 - 養殖魚のガウス分布 : $N(\mu=3.66\text{cm}, \sigma=3.1\text{mm}) \sim N(\mu=4.72\text{cm}, \sigma=1.3\text{mm})$ の範囲で、人によってパラメータを変えた



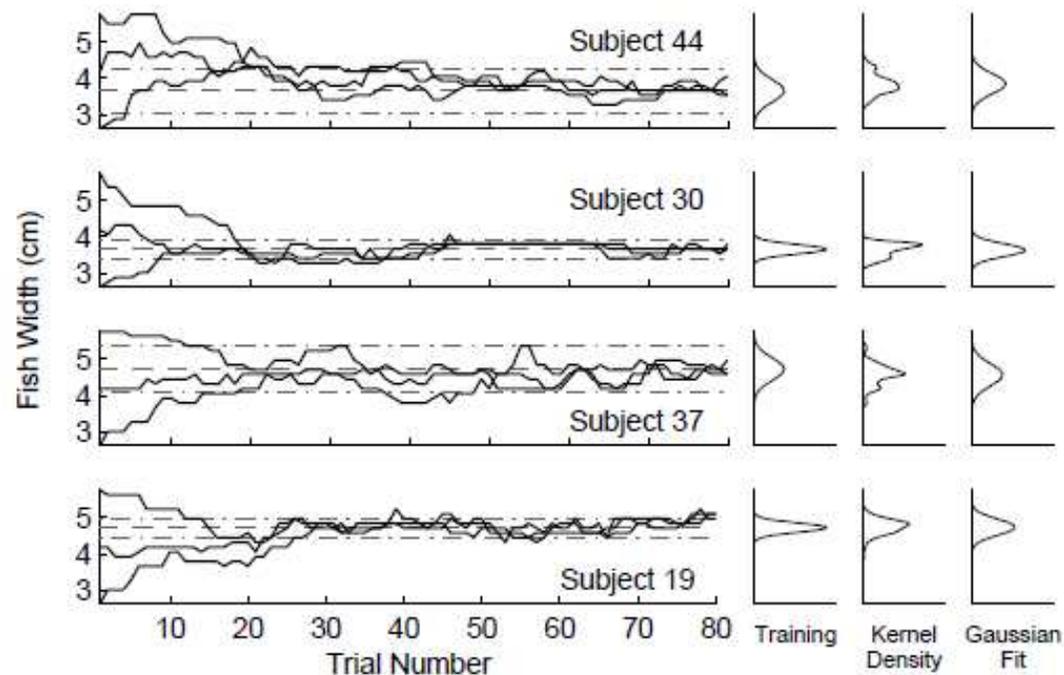
カテゴリが既知の場合の実験

養殖の魚と天然の魚の区別を人間に学習させるタスク

- **MCMC trial**
 - 2つの異なる魚のイラストが被験者に提示され、どちらが養殖であるかを予想させる。
 - つまり生成モデルがGaussian である方を当ててもらおう。
 - ただし、2つの魚は実際にはGaussian から発生されない。片方の魚が MCMC の current state で、もう片方の魚が proposal になっている。どちらが current state でどちらが proposal かは知らされない。左右の配置はランダムに決める。
 - つまり、人が心の中にもっている $p(x|c)$ のガウシアンを、人の回答を利用してMCMCする
 - **MCMCのstate の初期値を3種類設定し、一人の被験者に3種類の初期状態に対する実験を行った。**
 - 初期値 : 2.63cm, 4.20cm, 5.76cm
 - それぞれの初期値に対してtraining -> MCMC を繰り返して、学習してもらった心の中の $p(x|c)$ を忘れないようにした
 - 3つの Markov Chain が交差したら定常状態に達したとするheuristicsを導入
-

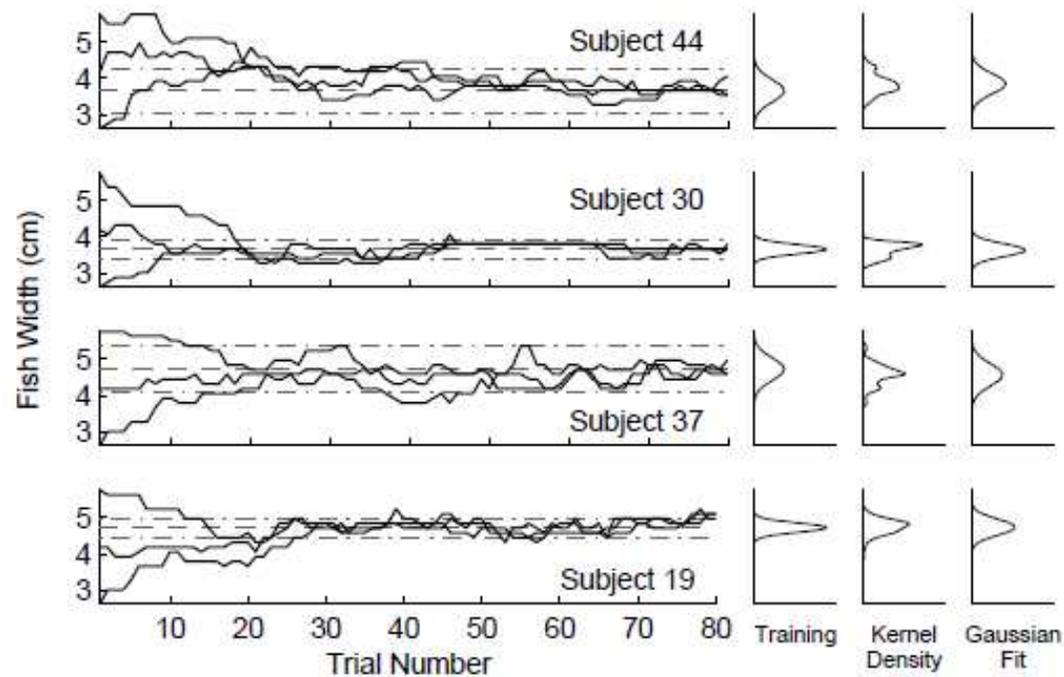
養殖の魚と天然の魚の区別を人間に学習させるタスク： MCMC trial の結果

- 3つの実線が MCMC の state で、dashed line は training 時に発生させたそれぞれの Gaussian の平均値、dot-dashed lines は $\pm 2\sigma$ 。
 - 結構平均値近くに収束していて、人の感覚ってやっぱり頭がいいんだな、と思ったり。
- 分布は、leftmost が training 時の Gaussian をあらわし、center と rightmost は MCMC 時のサンプルから kernel density estimate と Gaussian fit したものの。
 - 結構あってます。



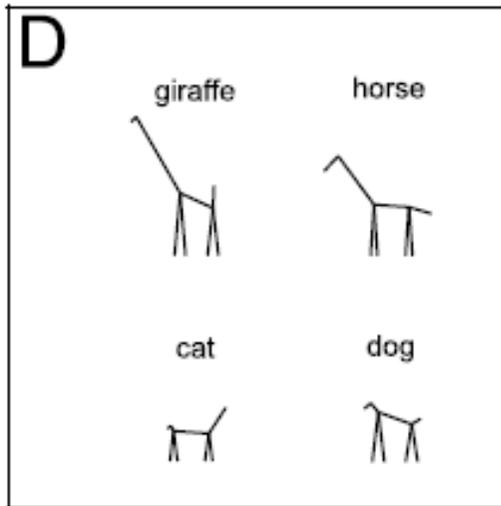
養殖の魚と天然の魚の区別を人間に学習させるタスク： MCMC trial の結果

- Training distribution に比べて、MCMC から出てきた分布は分散が大きい傾向がある
 - ▶ Perceptual noise の影響、または
 - ▶ rational Bayesian Learner model が不適切で、 $\gamma < 1$ な rule が使われているのでは、としている
 - 最初の仮説に反して、less deterministic ではないか

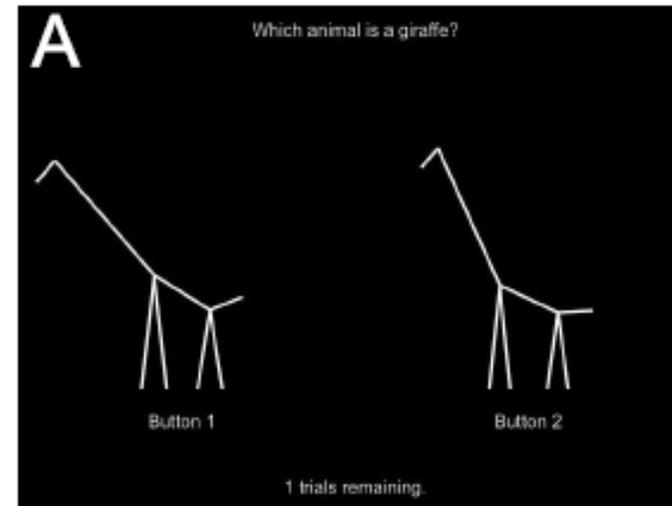


もう少し高次元のデータの場合

- さっきのデータは1次元だったけど、今度は 9-dimensional stick figure space からサンプルを生成する



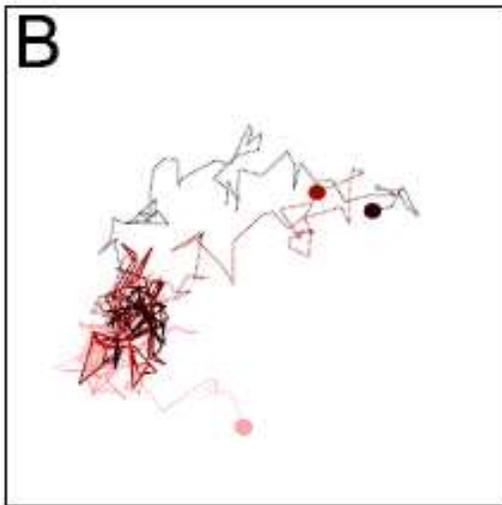
4種類のfigureを用意
(図はtraining distribution
の平均値をあらわしている)



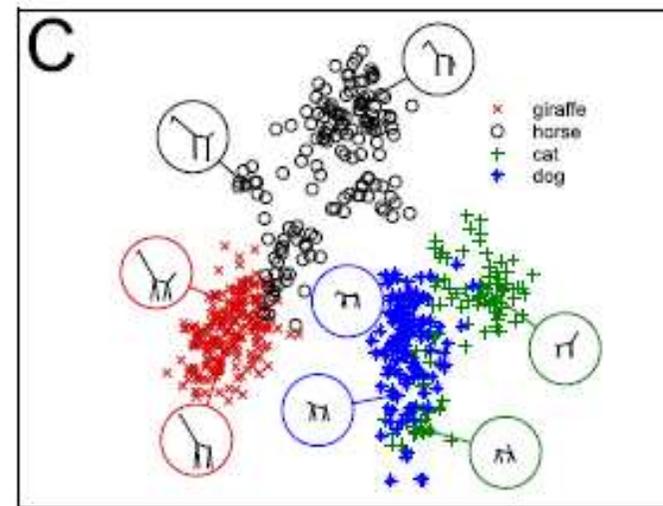
やっぱり2択の質問を
繰り返してMCMC

もう少し高次元のデータの場合

- さっきのデータは1次元だったけど、今度は 9-dimensional stick figure space からサンプルを生成する
- 著者らは、このLDSの結果を見る限り、人間は情報をかなり効率よく低次元空間の狭い領域に射影して保存しており、したがってMCMCによりそれを再生するのが効率的である、と主張している (ただしこの claim には validation がもっと必要、ともいっている)



9次元空間上のMCMCの遷移経路
をLDSで2次元に写像したもの



全てのサンプル
(人の心の中にもっているモデルからのサンプル)
を同様にLDSで2次元に写像したもの。かなり
はっきりと識別されている。

その他・感想

- **Subjective probabilities** による **generative model** を学習する研究以外に、人間の心の中の**decision boundary**を学習する研究もあるそうです
 - **工学的利用と理学的利用の使い分けをどうするか**
 - ▶ 工学的利用
 - 人間の価値関数を擬似的に再現する判別器をアンケート結果から外部で学習する
 - 人間の内部表現などどうでも良く、結果的に人間の判断と同じ判別ができれば十分
 - ▶ 理学的利用
 - 人間の脳の内部状態の再現に、手動のmachine learning algorithmが使える
 - 人間がオブジェクトを表現しているときの内部表現を高価なデバイスを使わずに取り出したい
 - **取り出したい定常分布が何であるかをよく考えることで、いろいろ面白い**
「手動」アルゴリズムは設計できそう – それなりに有望なアプリがあると思われる
 - ▶ 例: 「どちらの顔が好みの顔ですか?」といったメンタル部分のモデル化は、理学的に内部表現を取り出してもいいし、工学的に実質上十分なモデルを学習して(胡散臭い)ビジネスに使ってもいい
 - ▶ 個人的には、音感テストみたいのを繰り返すことで、音に関する知覚の分布(心理的表現)を取り出し、音声認識器に適用してみたいな、と思ったり
-